La corde de guitare

Dans cette étude, on néglige le terme d’amortissement visqueux : qui correspond à un effet retard, qualifié d’hystérésis, du matériau. Ce terme a tendance à être prépondérant aux hautes fréquences. Il induit des instabilités numériques.

Le modèle de D’Alembert

Equation de D’Alembert des vibrations transversales de la corde tendue

Une corde est tendue entre le point A et le point B horizontalement suivant l’axe des .

Pour se représenter la tension T dans la corde, on imagine que la corde est attachée en A et qu’elle est tendue par un poids de masse m via une poulie en B : T= m g (masse fois accélération de pesanteur)

g=9,81 ms-2

Par exemple pour une masse de 1 kg, la tension T est de 9,81 kg ms-2=9,81 Newtons.

T

-T

1Kg

A

B

g (pesanteur)

Lorsque la corde est en équilibre immobile les forces de tension dans un sens et dans l’autre s’équilibrent (T et –T).

La longueur de la corde entre ses deux points de fixation est appelée L=AB.

La masse linéique (masse par unité de longueur) de la corde est notée mu : .

Rappelons que l’équation des ondes de D’Alembert s’écrit :

Cette équation s’écrit aussi :

Avec :

La longueur d’onde fondamentale de vibration correspond à deux fois la longueur de la corde (deux ventres de vibration). Donc la fréquence fondamentale de vibration vaut :

Paramètres pour une corde en nylon Si2 (247 Hz) :

Ce qui donne :

La corde avec amortissement fluide

Ce cas est celui de l’équation de D’Alembert avec seulement un terme d’amortissement fluide :

Cette équation prend en compte un terme d’amortissement fluide  qui correspond aux frottements de l’air. Ce terme a tendance à être prépondérant aux basses fréquences.

On suppose que la corde est échantillonnée, sur points par pas , entre les points et . Donc .

On veut estimer la déformation sur la durée  : ( points).

Pour calculer l’équation, on discrétise à partir du calcul des différences finies (voir annexe).

On utilise les trois approximations :

L’équation devient :

Ou encore :

Que l’on réécrit comme suit : et

Et en posant :

gamma=T\*delta\_t^2/delta\_x^2;

alpha=mu+sigma\*delta\_t;

theta=-mu+sigma\*delta\_t;

l’équation devient :

Pour tous les instants , les extrémités sont fixes :

A l’instant de départ, la forme de la corde est triangulaire d’amplitude , au point

A l’instant de départ, la vitesse de la corde est nulle, en chaque point n :

Paramètres pour une corde Si2 (247 Hz) :

La corde de guitare (avec raideur)

Phénomènes d’amortissement

On prend en compte un terme d’amortissement fluide : qui correspond aux frottements de l’air. Ce terme a tendance à être prépondérant aux basses fréquences.

Prise en compte de l’élasticité du matériau

Pour tenir compte des propriétés d’élasticité de la corde, il faut aussi prendre en compte d’autres paramètres.

La section droite de la corde est un cercle de rayon r.

La corde peut avoir des propriétés élastiques qui sont données par plusieurs grandeurs :

* Le module d’élasticité de Young : E
* Le moment d’inertie de la section droite :

Le terme d’élasticité qui s’ajoute à l’équation de D’Alembert pour les vibrations transversales est :

* Un terme de raideur : qui dépend du matériel de la corde. Il correspond à la résistance de la corde à se laisser courber.

Remarques :

1. On ne s’intéresse pas aux vibrations longitudinales et aux vibrations de torsion, qui restent faibles et à plus haute fréquence.
2. Les vibrations de torsion mettent en œuvre d’autres paramètres élastiques :

* Le coefficient de poisson :
* Le module de rigidité : G

Equation complète des vibrations transversales

L’équation fondamentale de la dynamique (somme des forces = masse fois accélération) donne l’équation suivante pour chaque élément de longueur de la corde :

A cette équation s’ajoutent les conditions aux limites :

Les deux premières conditions imposent que la corde est fixée à ses deux bouts.

Les deux conditions centrales imposent la forme et la vitesse initiales de la corde.

Les deux dernières conditions imposent une somme des tensions nulle aux points d’attache.

On remplace toutes les valeurs de différences finies (voir annexe) dans l’équation :

Ceci donne :

On regroupe ensuite les temps futurs d’un côté de l’égalité :

On regroupe alors les termes en factorisant :

On pose :

L’équation précédente s’écrit :

On suppose que la corde est échantillonnée, sur points par pas , entre les points et . Donc .

Le vecteur de tous les échantillons de la corde à l’instant s’écrit :

Compte tenu des équations aux limites on a pour tout :

On peut donc écrire l’équation :

Avec les matrices suivantes :

Notons que la matrice B présente un problème pour les points et , car pour bien calculer ces points il faudrait introduire les points et qui n’existent pas et les pondérer par .

Pour résoudre ce problème, on doit identifier comment calculer et .

Ce point est laissé de côté pour l’instant.

L’équation qui fournit la solution est :

Pour les applications numériques on prendra :

Paramètres pour une corde Si2 (247 Hz) :

Annexe 1, calcul des différences finies

Calcul des différences finies

Pour calculer les différences finies, on se base sur les formules de Taylor qui expriment le développement du déplacement aux premiers ordres (à noter que l’on exprime les formules que selon un seul paramètre, l’autre étant fixé).

A fixé :

A fixé :

A partir de ceci on obtient :

Et aussi :

Pour obtenir l’ordre 4, on écrit :

Dont la somme donne :

Par ailleurs, on écrit :

Dont la somme donne :

A cette équation on soustrait 4 fois la somme précédente et on obtient :

On obtient donc finalement :

On échantillonne en par pas et on indice .

On échantillonne en par pas et on indice .

En tenant compte de l’échantillonnage en temps et en espace, les différences finies s’expriment donc selon les équations suivantes.

On a :

On note :

De la même façon :

Et aussi :

Annexe 2, vérification du calcul matriciel

Cette annexe a pour but de vérifier que le calcul du modèle étendu (équation matricielle), correspond au calcul du modèle simple amorti lorsque l’on met à zéro et .

Si l’on pose :

On obtient :

Compte tenu des coefficients nuls, les matrices deviennent :

Avec les matrices suivantes :

Avec ceci on obtient :

L’équation devient alors :

C’est-à-dire :

Soit encore :

Ce qui est bien l’équation de la corde élastique.